

Úloha z IB107 6.10.2008

Tomáš Zábojník

UČO: 256774 ($\frac{256774}{3} = 85591.\bar{3}$, $256774 \bmod 3 = 1$)

Zadanie: Nech $\Phi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ je univerzálna funkcia. Ukážte, že funkcia $\psi(x) = \Phi(x, x)$ nemôže byť rozšírená na totálnu vyčísliteľnú funkciu.

Riešenie: Vezmime numeráciu všetkých vyčísliteľných funkcií ω takú, že Φ je univerzálna funkcia nad ω . Aby ψ bola totálna, v miestach, kde $\Phi(x, x)$ nie je definovaná ju rozšírime (napríklad zdefinujeme ako 0). Ako zistíme, že funkcia nie je pre daný vstup definovaná? Asi nijak, keďže nevieme riešiť problém zastavenia. Poďme na to teda podľa nápovedy a predpokladajme, že sa nám to, napríklad vhodnou voľbou numerácie podarí (teraz už len okopírujeme dôkaz vety 5.5 zo skrípt). Definujme funkciu $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takto: $h(i) = \psi(i) + 1$. Pre všetky i platí $h(i) \neq \omega_i i$, teda $h \neq \omega$, h sa líši od každého programu numerácie ω a teda h nie je vyčísliteľná. Keby funkcia ψ bola vyčísliteľná, bola by vyčísliteľná aj funkcia h , teda sme došli k sporu.